Das Gegenereignis und der gegenteilige Blick auf das gleiche Ereignis

Renate Motzer, Augsburg

Zusammenfassung: *Bezüglich des im Jahre 2003 von mir festgestellten Problems, das Gegenereignis nicht mit dem „gegenteiligen" Blick auf das gleiche Ereignis zu verwechseln, habe ich inzwischen eine Notation gefunden, die etlichen Schülerinnen und Schülern hilft, beide Perspektiven auseinander zu halten.*

Schon vor einigen Jahren hat mich die Schwierigkeit etlicher Schülerinnen und Schüler beschäftigt, das Gegenereignis richtig zu formulieren bzw. die Formel $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$ richtig anzuwenden (vgl. Motzer 2003).

Viele Schülerinnen und Schüler denken beim Gegenereignis durchaus an eine Gegenmenge, aber nicht an die passende.

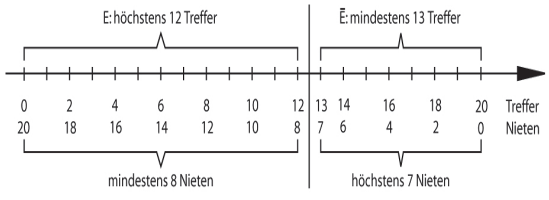
Als Beispiel:

> Aus einer Lostrommel werden 20 Lose gezogen.
> E: Man erhält höchstens 12 Gewinne.

Wenn man vom Gegenereignis spricht, stellen sie sich die gleiche Lostrommel vor, das Ziehen der gleichen 20 Lose und denken an die Nieten. Für diese Schülerinnen und Schüler wäre das Gegenereignis: „Es sind mindestens 8 Nieten."

Dass es sich hier nicht um das Gegenereignis handelt, sondern um die gleichen Lose nur aus der gegenteiligen Perspektive betrachtet, ist ihnen oft nicht leicht klar zu machen.

Die Schülerinnen und Schüler, die sich auf folgende doppelte Repräsentation der möglichen Ergebnisse einlassen, gewinnen meist am ehesten einen Überblick über die beiden Möglichkeiten, an das Gegenteil zu denken. Zum einen gibt es die gegenteilige Perspektive des gleichen Ereignisses, wofür folglich auch die gleiche Wahrscheinlichkeit gilt. Diese wird darunter notiert. Das Ereignis und sein Gegenereignis mit der Gegenwahrscheinlichkeit stehen nebeneinander:



Das Gegenereignis zu „Höchstens 12 Treffer" ist in diesem Fall mit Nieten ausgedrückt: „Höchstens 7 Nieten". Diese Formulierung ohne eine entsprechende Zusammenstellung zu finden, ist ziemlich schwer und wird im Unterricht normalerweise auch nicht gefragt.

Übungen, um diese beiden Sichten des „Gegenteils" auseinander zu halten, könnten folgender Art sein:

> Sei A das Ereignis: „Mindestens 5 von 20 Losen sind Gewinne."
>
> Formulieren Sie das gleiche Ereignis aus der Perspektive der Nieten.
>
> Formulieren Sie $\overline{A}$ aus der Perspektive der Gewinne und aus der Perspektive der Nieten.

Um zu prüfen, ob von der Behandlung dieses Stoffes nach den großen Ferien noch etwas übrig geblieben ist, habe ich zu Beginn des Schuljahres folgende Aufgabe gestellt:

> Bei einer Produktion seien 60 % der Gummibärchen rot und 40 % grün. Aus dieser werden 10 zufällig ausgewählt.
>
> 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
>   a) alle rot sind
>   b) alle grün sind
>   c) höchstens 2 rot sind
>   d) mindestens 8 grün sind
>   e) die ersten 3 grün, die anderen rot sind
>   f) nicht alle rot sind
>   g) höchstens 9 rot sind
>   h) mindestens 1 grün ist
>   i) genau 6 rot sind.
> 2. Formulieren Sie das Gegenereignis zu:
>   a) „Alle sind rot."
>   b) „Mindestens 3 sind grün."
>   c) „Höchstens 4 sind rot."

Das Abschneiden der Schülerinnen und Schüler, die im Jahr vorher bei mir in der Klasse waren und die doppelte Repräsentation kennengelernt haben, war erfreulich gut, auch wenn sie nicht direkt auf die doppelte Repräsentation zurückgegriffen haben.

Einige Schülerinnen und Schüler notierten zumindest auf ihrem Schmierblatt einen oder mehrere Zahlenstrahlen.

Stochastik in der Schule 31 (2011) 2, S. 28–29

Etliche erkannten, dass es bei 1c) und d) um das gleiche Ereignis geht. Noch mehr Schülerinnen und Schüler stellten fest, dass f), g) und h) das gleiche Ereignis unterschiedlich formulieren. Einige gaben für c) und d) einen unterschiedlichen Term an, der aber zum gleichen Ergebnis führte (einmal mit p = 0,6 und einmal mit p = 0,4). Bsp:

c)höchstens 2 rot sind $\binom{10}{2}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4^8+\binom{10}{1}\cdot 0{,}6^1\cdot 0{,}4^9+0{,}4^{10}=1{,}23\%$

d)mindestens 8 grün sind $\binom{10}{8}\cdot 0{,}4^8\cdot 0{,}6^2+\binom{10}{9}\cdot 0{,}4^9\cdot 0{,}6^1+0{,}4^{10}=1{,}23\%$

Bzgl. Aufgabe 2 gab es 3 Typen von Lösungen, die sich häuften:

Typ I : richtige Lösung

a) „mindestens 1 ist grün“

b) „höchstens 2 sind grün“

c) „mindestens 5 sind rot“

Aufgabe a) wurde von ein paar wenigen mit „alle sind grün“ beantwortet.

Typ II: die gegenteilige Perspektive auf das gleiche Ereignis:

a) „es gib keine grünen“

b) „höchstens 7 sind rot“

c) „mindestens 6 sind grün“

Diese Lösung wurde von deutlich weniger Schülerinnen und Schüler angegeben, nur eine von ihnen war schon im letzten Jahr in dieser Klasse gewesen.

Typ III: das Wort „mindestens“ wurde durch „höchstens“ ersetzt und umgekehrt:

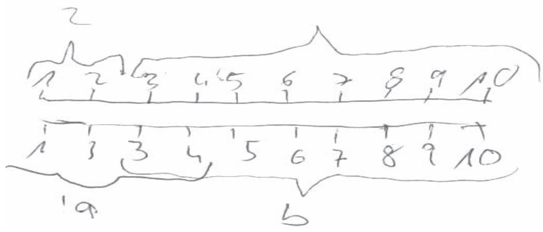
a) Meist: „alle sind grün“

b) „höchstens 3 sind grün“

c) „mindestens 4 sind rot“

Hier wurde also nicht erkannt, dass „genau 3“ bzw. „genau 4“ nicht zum Ereignis und zum Gegenereignis gleichzeitig gehören können.

Ein Schüler notierte 2-mal einen Zahlenstrahl auf dem Lösungsblatt. Vielleicht hat er sich an die doppelte Repräsentation erinnert, aber sie dann noch nicht mehr in der entsprechenden Form darstellen können. Er kann aus seiner Darstellung nicht erkennen, dass 1c) und 1d) das gleiche Ereignis beschreiben, dennoch hilft die Darstellung zur Lösung von 2b) und 2c).



Man sieht: er hat den Fall „0“ vergessen (bei der Rechnung zu 1c) wurde der Fall von ihm aber nicht übersehen).

Die Lösung von 2b) und 3c) wurde richtig abgelesen, wobei 2c) falsch mit „a“ beschriftet wurde und 2b) in beide Reihen eingetragen wurde, obwohl bei der doppelten Repräsentation eigentlich in einer die Anzahl der grünen, in der anderen die der roten Gummibärchen stehen sollte.

Daraus schließe ich, dass die doppelte Repräsentation nicht leicht zu merken ist und nach Monaten nicht mehr unbedingt richtig präsent ist, dass aber etwas von den Ideen, die damit vermittelt werden sollten, doch bei etlichen Schülerinnen und Schülern dieser Klasse im mittelfristigen Gedächtnis geblieben ist, so dass die Klasse diese Aufgabe insgesamt erfreulich gut bewältigen konnte – ohne dieses Einzelergebnis freilich verallgemeinern zu wollen.

Literatur

Motzer, R. (2003): Hat das Gegenereignis etwas mit einem Gegenteil zu tun? – Was Schülerinnen und Schüler mit diesen Begriffen verbinden und welche Schwierigkeiten sich daraus ergeben können. In: SiS Bd. 23, Heft 3, S. 2–9

Anschrift der Verfasserin:

Dr. Renate Motzer
Didaktik der Mathematik
Universität Augsburg
Universitätsstr. 10
86135 Augsburg
Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de